Mathematik

Matrizenrechnung

1. Einstufige Prozesse

Zur Beschreibung einstufiger Prozesse durch Matrizen ist lediglich nur eine Matrix nötig. Dabei beschreibt diese Matrix A den Prozess eines Ausgangsprodukts zu dessen Endprodukt:

$$\text{Ausgangsprodukt} \xrightarrow{\text{Prozess}(A)} \text{Endprodukt}.$$

Mittels eines <u>Gozintographen</u> kann eine Tabelle und aus dieser die notwendige Matrix A erstellt werden. Dabei besteht eine solche Matrix immer aus m Zeilen und n Spalten (m x n-Matrix):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix A wird häufig auch als **Prozess-** oder **Bedarfsmatrix** bezeichnet.

<u>Beispiel:</u>

Drei Endprodukte (E_1, E_2 und E_3) sollen aus drei Ausgangsprodukten/Rohstoffen (R_1, R_2 und R_3) gewonnen werden. Für E_1 sind eine Einheit R_1, drei Einheiten R_2 und zwei Einheiten R_3 nötig; für E_2 sind null Einheiten R_1, eins Einheiten R_2 und eins Einheiten R_3 zu verwenden; und für E_3 sind zwei Einheiten R_1, eins Einheiten R_2 und null Einheiten R_3 zu gebrauchen. Nun soll aus diesen Informationen eine Matrix erstellt werden und die Bedeutung des Eintrags a_{32} erklärt werden.

Um eine Matrix A nun zu erstellen, kann aus einem Gozintographen eine Tabelle angefertigt werden.

	E_1	*E_2*	*E_3*
R_1	*1*	*0*	*2*
R_2	*3*	*1*	*1*
R_3	*2*	*1*	*0*

Aus dieser Tabelle folgt unmittelbar die (Prozess-)Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei handelt es sich sogar um eine „quadratische Matrix“, da sie gleich viele Zeilen wie Spalten enthält.
Der Eintrag a_{32} (dritten Zeile und zweite Spalte) ist in dieser Matrix der Wert 1. Er bedeutet, dass für das Endprodukt 2 (E_2) eine Einheit des Rohstoffs 3 (R_3) benötigt wird.

Soll eine bestimmte Menge an Endprodukten hergestellt werden, gibt man diese in einem Spaltvektor $\vec{x}$ an. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y},$$

wobei $\vec{y}$ die Menge an Ausgangsprodukten angibt.

Beispiel:

Gesucht ist die benötigte Menge an Ausgangsprodukten, wenn im bereits beschriebenen Verfahren 20 Einheiten E_1, 30 Einheiten E_2 und 25 Einheiten E_3 gebraucht werden.

Um diesen Bedarf zu bestimmen, muss zunächst der Spaltvektor $\vec{x}$ bestimmt werden. Dieser ergibt sich zu:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Gemäß des Ansatzes $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ folgt für die Menge an Ausgangsprodukten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix} = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdot 20 + 0 \cdot 30 + 2 \cdot 25 \\ 3 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 25 \\ 2 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 0 \cdot 25 \end{pmatrix} = \vec{y},$$

und somit:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 70 \\ 115 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Folglich werden für die benötigten Bedarf von 20 Einheiten E_1, 30 Einheiten E_2 und 25 Einheiten E_3 also 70 Einheiten R_1, 115 Einheiten R_2 und 70 Einheiten R_3 gebraucht.

2. Rechenregeln für Matrizen

(1) Matrizenaddition

Sind zwei Matrizen $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 8 & 7 & 3\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}6 & 3 & 9\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ gegeben, können diese miteinander addiert werden. Es folgt:

$$A+B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 8 & 7 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 3 & 9\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+6 & 5+3 & 2+9\\ 8+1 & 7+4 & 3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 8 & 11\\ 9 & 11 & 5\end{pmatrix}.$$

Wichtig dabei ist, dass nur Matrizen miteinander addiert werden können, die die gleichen Zeilen- und Spaltenanzahlen haben.

(2) Subtraktion von Matrizen

Analog zur Matrizenaddition können auch eine Matrix von einer anderen subtrahiert werden. Seien die Matrizen $A=\begin{pmatrix}12 & 9 & 17\\ 8 & 10 & 2\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 9\\ 5 & 7 & 1\end{pmatrix}$ gegeben und soll B von A subtrahiert werden, ergibt sich:

$$A-B=\begin{pmatrix}12 & 9 & 17\\ 8 & 10 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 3 & 9\\ 5 & 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-4 & 9-3 & 17-9\\ 8-5 & 10-7 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6 & 8\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Auch hier sei darauf zu achten, dass nur solche Matrizen voneinander subtrahiert werden können, die sie die gleichen Zeilen- und Spaltenanzahlen haben.

(3) s-Multiplikation

Soll die Matrix $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 8 & 7 & 3\end{pmatrix}$ beispielsweise verdoppelt werden, gilt:

$$s\cdot A=2\cdot A=2\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 8 & 7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 2\\ 2\cdot 8 & 2\cdot 7 & 2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 10 & 4\\ 16 & 14 & 6\end{pmatrix}.$$

(4) Matrizenmultiplikation

Sollen die beiden Matrizen $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ miteinander multipliziert werden, gilt:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4+2\cdot 1 & 3\cdot 5+2\cdot 2\\ 1\cdot 4+1\cdot 1 & 1\cdot 5+1\cdot 2\\ 0\cdot 4+3\cdot 1 & 0\cdot 5+3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 19\\ 5 & 7\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Wichtig ist hierbei, dass zwei Matrizen nur dann multipliziert werden können, wenn die eine Matrix so viele Spalten wie die andere Zeilen besitzt.

3. Mehrstufige Prozesse

Zur Beschreibung mehrstufiger Prozesse sind mindestens zwei Matrizen A und B (<u>zweistufige Prozesse</u>) nötig. Dabei beschreibt die Matrix A, wie aus bestimmten Ausgangsprodukten zunächst Zwischenprodukte entstehen:

$$\text{Ausgangsprodukte} \xrightarrow{\text{Prozess}(A)} \text{Zwischenprodukte.}$$

Die Matrix B beschreibt, wie aus diesen Zwischenprodukten die Endprodukte entstehen:

$$\text{Zwischenprodukte} \xrightarrow{\text{Prozess}(B)} \text{Endprodukte.}$$

Um zu wissen, wie viele Ausgangsprodukte nötig sind, um die Endprodukte herzustellen, muss man eine „Rohprodukt-Endprodukt-Matrix“ C erstellen. Diese ergibt sich aus der Multiplikation der Matrizen A und B:

$$C = A \cdot B.$$

<u>Beispiel:</u>

Gegeben sei zum einen die Gewinnung dreier Zwischenprodukte (Z_1, Z_2 und Z_3) aus drei Ausgangsprodukten/Rohstoffen (R_1, R_2 und R_3) und zum anderen die Gewinnung dreier Endprodukten (E_1, E_2 und E_3) aus den Zwischenprodukten. Den folgenden Tabellen können die Informationen zur Gewinnung der Zwischen- und der Endprodukte entnommen werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	4	6	5
R_2	1	3	0
R_3	5	2	4

Tab.1: Gewinnung der Zwischenprodukten

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	0
Z_2	6	4	0
Z_3	3	5	1

Tab.2: Gewinnung der Endprodukte

Gesucht ist nun, wie viele Rohstoffe man für die einzelnen Endprodukte benötigt.

Um herauszufinden, wie viele Rohstoffe die einzelnen Endprodukte bilden, müssen zunächste zwei Matrizen angefertigt werden.
Aus der ersten Tabelle lässt sich eine Matrix A erstellen, die die Gewinnung der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen beschreibt:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren lässt sich aus der zweiten Tabelle eine Matrix B erstellen, die die Gewinnung der Endprodukte aus den Zwischenprodukten beschreibt:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun soll eine dritte Matrix C beschreiben, aus wie vielen Rohstoffen die einzelnen Endprodukte hergestellt werden. Diese „Rohstoff-Endprodukt-Matrix“ C ergibt sich aus der Multiplikation der Matrizen A und B. Es folgt der allgemeine Ansatz:

$$C = A \cdot B,$$

und somit:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix C ergibt sich also:

$$C = \begin{pmatrix} 59 & 53 & 5 \\ 20 & 13 & 0 \\ 34 & 33 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese gibt Aufschluss darüber, aus wie vielen Rohstoffen die jeweiligen Endprodukte nun hergestellt werden. E_1 *zum Beispiel wird aus 59 Einheiten* R_1*, 20 Einheiten* R_2 *und 34 Einheiten* R_3 *hergestellt.*

Geht man nun von einem Auftrag aus, der eine bestimmte Anzahl jeweiliger Endprodukte benötigt, muss die „Rohprodukt-Endprodukt-Matrix“ C mit einem Spaltenvektor $\vec{x}$ multipliziert werden:

$$C \cdot \vec{x} = \vec{y},$$

wobei $\vec{y}$ dann die notwendige Menge an Ausgangsprodukten/Rohstoffen darstellt, um den benötigten Bedarf an Endprodukten herstellen zu können.

Beispiel:

Gegeben sei bereits beschriebene Gewinnung an Zwischen- und Endprodukten. Im folgenden sei die Menge an Rohstoffen gesucht, um den Bedarf von 20 Einheiten E_1, 50 Einheiten E_2 und 35 Einheiten E_3 herstellen zu können.

Zunächst muss dazu die „Rohprodukt-Endprodukt-Matrix“ C bestimmt werden. Diese ergibt sich aus vorangegangenem Beispiel zu:

$$C = \begin{pmatrix} 59 & 53 & 5 \\ 20 & 13 & 0 \\ 34 & 33 & 4 \end{pmatrix}.$$

Anhand des benötigten Bedarfs von 20 Einheiten E_1*, 50 Einheiten* E_2 *und 35 Einheiten* E_3*, lässt sich ein Spaltenvektor* $\vec{x}$ *bestimmen:*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

Um nun herauszufinden, wie viele Rohstoffe denn für diesen Bedarf gebraucht werden, muss die „Rohprodukt-Endprodukt-Matrix“ C mit dem Spaltenvektor $\vec{x}$ *multipliziert werden. Es ergibt sich nach dem Ansatz* $C \cdot \vec{x} = \vec{y}$:

$$C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 59 & 53 & 5 \\ 20 & 13 & 0 \\ 34 & 33 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4005 \\ 1050 \\ 2470 \end{pmatrix}.$$

Für den beschriebenen Bedarf von 20 Einheiten E_1, 50 Einheiten E_2 und 35 Einheiten E_3 werden also 4005 Einheiten R_1, 1050 Einheiten R_2 und 2470 Einheiten R_3 benötigt.

4. Inverse Matrix

Kehrt man den „normalen“ Prozess von einem Ausgangsprodukt zu einem Endprodukt um, erhält man über nun ausgehend von den Endprodukten über A^{-1} die Ausgangsprodukte:

$$\text{Ausgangsprodukte} \xleftarrow{\text{Prozess}(A^{-1})} \text{Endprodukte.}$$

Man erhält also über diese inverse Matrix den Schritt zuvor.
Wird eine quadratische Matrix A mit ihrer inversen Matrix A^{-1} multipliziert, erhält man die **Einheitsmatrix E**. Folgender Zusammenhang wird dadurch erkennbar:

$$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A.$$

Ob eine Matrix invertierbar ist, zeigt sich, wenn für Determinante $D \neq 0$ gilt.

Für eine 2 x 2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bestimmt man beispielsweise die Determinante gemäß $D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

<u>Beispiel:</u>

Gegeben sei eine Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, die den Prozess zweier Endprodukte E_1 und E_2 aus den Vorstufen Z_1 und Z_2 beschreibt. Gesucht werden soll die Anzahl der noch zu produzierenden Endprodukte, wenn alle noch vorhandenen Vorstufen – je 1000 Einheiten – aufgebraucht werden sollen.

Um diese Anzahl zu bestimmen, muss zunächst die Inverse der Matrix A bestimmt werden. Diese ergibt sich zu:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & -0{,}25 \\ 0{,}125 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Multipliziert man diese nun mit den Einheiten der noch vorhandenen Vorstufen, folgt gemäß $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & -0{,}25 \\ 0{,}125 & 0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix},$$

und somit:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 125 \\ 375 \end{pmatrix}.$$

Folglich können noch 125 Einheiten E_1 und 375 Einheiten E_2 hergestellt werden, bis alle Vorstufen aufgebraucht sind.

5. Stochastische Prozesse

Bei einer Matrix P handelt es sich dann um eine **stochastische Matrix** (auch **Übergangsmatrix** genannt), wenn

- die Matrix quadratisch ist,
- für jedes Element a der Matrix $0 \leq a \leq 1$ gilt und
- die Summe der Elemente in jeder Spalte 1 beträgt.

Der zu einer stochastischen Matrix zugehörige Prozess wird **Austauschprozess** genannt, da bei diesen Prozessen die Gesamtzahlen gleich bleiben (Summe der Elemente in jeder Spalte ist 1) und lediglich nur unter verschiedenen Kategorien getauscht wird.
Da man bei Austauschprozessen oft an langfristigen Entwicklungen interessiert ist, wird immer dieselbe stochastische Matrix P verwendet. Hierzu gibt es einen Startvektor $\vec{x}$, der die Verteilung am Tag 0 zeigt. Multipliziert mit der stochastischen Matrix P ergibt sich die Verteilung am 1. Tag. Dies wieder mit P multipliziert ergibt die Verteilung am 2. Tag; usw. (**Markoff´sche Kette**). Für die Verteilung zu einem bestimmten Tag kann auch mit $P^t \cdot \vec{x}$ (t in Tagen) gerechnet werden.
Streben die Potenzen von P gegen eine Matrix G, so ist G die **Grenzmatrix**:

$$\lim_{t \to \infty} P^t = G .$$

Ist dies der Fall, existieren auch **stabile Verteilungen** $\vec{x}^*$, die auch **Grenzverteilung** genannt wird. Für diese gilt:

$$P \cdot \vec{x}^* = \vec{x}^* .$$

Die Elemente des **Fixvektors** $\vec{x}^*$ sind Vielfache der Elemente der Spalte der Grenzmatrix.

<u>Beispiel:</u>

Für drei Tankstellen A, B und C sollen die folgenden Annahmen getroffen werden: Die Kunden von A verteilen sich beim nächsten Tanken auf die Tankstellen A, B und C im Verhältnis 2 : 1 : 1. Die Kunden von B wechseln das nächste Mal je 25% zu A und zu C. 80% der Kunden von C wählen diese Tankstelle auch das nächste Mal, der Rest fährt zu A. Jeder Kunde tankt pro Woche genau ein Mal.
Anhand dieser dieser Aufgabe, soll nun

(1) eine Übergangsmatrix P bestimmt werden,
(2) die Verteilung der Autofahrer auf die drei Tankstellen für die nächsten beiden Wochen [für zehn Wochen] berechnet werden, wenn von den 1000 Autofahrer insgesamt in einer Woche 400 bei B und jeweils 300 bei A und bei C tanken,
(3) ein zu der Übergangsmatrix P passender Fixvektor P bestimmt werden und die zugehörige Grenzmatrix ermittelt werden und
(4) die Verteilung berechnet werden, die sich auf lange Sicht einstellt.

(1) Stellt man sich die nebenstehende Tabelle vor, ergibt sich für die Übergangsmatrix P:

$$P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0.2\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8\end{pmatrix}.$$

		von		
		A	B	C
nach	A	0,5	0,25	0,2
	B	0,25	0,5	0
	C	0,25	0,25	0,8

(2) Zunächst einmal wird der Startvektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}300\\400\\300\end{pmatrix}$ *angegeben. Dieser mit der Übergangsmatrix P multipliziert ergibt die Verteilung der Autofahrer auf die drei Tankstelle nach einer Woche. Es ergibt sich demnach:*

$$P\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\400\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}310\\275\\415\end{pmatrix}.$$

Folglich tanken nach einer Woche 310 Autofahrer bei A, 275 Autofahrer bei B und 415 Autofahrer bei C.

Multipliziert man diesen ermittelten Vektor $\vec{y}=\begin{pmatrix}310\\275\\415\end{pmatrix}$ *nun erneut mit der Übergangsmatrix P, so ergibt sich die Verteilung für die zweite Woche:*

$$P\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}310\\275\\415\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}306{,}75\\275\\478{,}25\end{pmatrix}.$$

Demzufolge tanken in der zweiten Woche bereits etwa 306 Autofahrer bei A, 275 Autofahrer bei B und etwa 478 Autofahrer bei C.
Um die Verteilung nach zehn Wochen zu bestimmen, kann die Übergangsmatrix zehn Mal mit sich selbst und dann mit dem Startvektor $\vec{x}$ *multipliziert werden. Es folgt:*

$$P^{10}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8\end{pmatrix}^{10}\cdot\begin{pmatrix}300\\400\\300\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}296{,}4\\148{,}7\\554{,}9\end{pmatrix}.$$

Also tanken nach zehn Wochen etwa 296 Autofahrer bei A, etwa 148 Autofahrer bei B und etwa 554 Autofahrer bei C.

(3) Um einen Fixvektor zu bestimmen, gilt der grundsätzliche Ansatz: $P\cdot\vec{x}^{\,*}=\vec{x}^{\,*}$*. Es folgt also:*

$$\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}^{\,*}=\vec{x}^{\,*},$$

bzw.:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Für das LGS und dessen Lösung ergibt sich somit:

$$\left| \begin{array}{l} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}2x_3 = x_1 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 = x_2 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}8x_3 = x_3 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 - \frac{8}{15}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{4}{15}x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{15}t \\ x_2 = \frac{4}{15}t \\ x_3 = t \end{array} \right|.$$

Da eben diese 1000 die gesamte Anzahl an Autofahrern meint, müssen die Einträge des Fixvektors in der Summe auch 1000 ergeben. Somit folgt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000.$$

Und setzt man die Werte des LGS ein, ergibt sich:

$$\frac{8}{15}t + \frac{4}{15}t + t = 1000,$$

und demnach:

$$t = 555\tfrac{5}{9}.$$

Wenn für $t = 555\frac{5}{9}$ *folgt, kann so auch* x_1 *zu* $296\frac{8}{27}$ *und* x_2 *zu* $148\frac{4}{27}$ *bestimmt werden, wenn man das Ergebnis für* t *in* x_1 *und* x_2 *einsetzt.*

Folglich ergibt sich der Fixvektor $\vec{x}^*$:

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 296\frac{8}{27} \\ 148\frac{4}{27} \\ 555\frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

Um nun noch die Grenzmatrix zu erhalten, kann ausgeklammert werden, sodass sich ergibt:

$$\begin{pmatrix} 296\frac{8}{27} \\ 148\frac{4}{27} \\ 555\frac{5}{9} \end{pmatrix} = 1000 \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

Da die Elemente in den Spalten der Grenzmatrix den Elementen des Fixvektors entsprechen, muss für die jeweilige Spalte des Grenzmatrix $\begin{pmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ *gelten. Für die Grenzmatrix folgt also:*

$$G = \begin{pmatrix} \frac{8}{27} & \frac{8}{27} & \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

(4) Da die Grenzmatrix nun bekannt ist, kann diese mit dem Startvektor $\vec{x}$ *multipliziert werden. Es ergibt sich also:*

$$G \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{8}{27} & \frac{8}{27} & \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 269 \\ 148 \\ 556 \end{pmatrix}.$$

Auf lange Sicht werden also etwa 269 Autofahrer bei A, etwa 148 Autofahrer bei B und etwa 556 Autofahrer bei C tanken.

6. Zyklisches Verhalten

Über ein Übergangsdiagramm erhält man für Populationsentwicklungen eine Übergangsmatrix U. Diese ist immer nach einem klassischen Schema aufgebaut:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Vermehrungsrate $v > 0$ ist und die Überlebensraten $0 < a, b \le 1$ sind.

Des Weiteren gilt, wenn

- $a \cdot b \cdot v < 1$ ist, stirbt die Population aus.
- $a \cdot b \cdot v = 1$ ist, entwickelt sich die Population zyklisch.
- $a \cdot b \cdot v > 1$ ist, nimmt die Population zu.

Dabei sei darauf zu achten, dass der Zyklus drei Zeiteinheiten beträgt.

Beispiel:

Ein Käfer, der kurz nach der Eiablage stirbt, legt so viele Eier, dass im nächsten Jahr daraus wieder 25 Larven (L) schlüpfen. Nur 10% dieser Larven überleben das erste Jahr und verpuppen sich. Nach einem weiteren Jahr werden 40% dieser Puppen (P) wieder zu Käfern (K).

Anhand dieser Aufgabe soll nun

(1) eine Übergangsmatrix ermittelt werden und
(2) überprüft werden, wie sich die Population entwickelt.

(1) Um eine Übergangsmatrix anzugeben, kann am besten zunächst ein Übergangs-diagramm erstellt werden:

$$L \xrightarrow{0,1} P \xrightarrow{0,4} K \xrightarrow{25} L$$

(eigentlich: Pfeil von K zu L über P)

Hieraus lässt sich über eine Tabelle (siehe nebenstehend) annähernd eine Übergangs-matrix anfertigen.

	L	*P*	*K*
L	*0*	*0*	*25*
P	*0,1*	*0*	*0*
K	*0*	*0,4*	*0*

Letztlich ergibt sich diese somit zu:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Aus dieser Übergangsmatrix lässt sich für $v = 25$, *für* $a = 0,1$ *und für* $b = 0,4$ *ablesen. Um nun zu überprüfen, wie sich diese Population denn entwickeln wird, wird* $a \cdot b \cdot v$ *berechnet:*

$$a \cdot b \cdot v = 0,1 \cdot 0,4 \cdot 25 = 1.$$

Da $a \cdot b \cdot v = 1$ *gilt, handelt es sich bei der Populationsentwicklung um ein zyklisches Verhalten.*

Beispielaufgaben sind dem Schulbuch (Lambacher Schweizer 11/12, Mathematik für Gymnasien, Gesamtband Oberstufe, Niedersachsen; Klett-Verlag) entnommen.