Mathematik

Vektorrechnung

Vektorrechnung

1. Definitionen

Gegeben seien die Punkte $A(2|3|4)$ und $B(3|5|8)$.
Dann ist der zugehörige **Vektor** $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-3 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{a}\,.$$

Der zu $\overrightarrow{AB}$ passende **Gegenvektor** ist als $\overrightarrow{BA}$ definiert:

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 3-5 \\ 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{b} = -\vec{a}\,.$$

Als **Ortsvektor** bezeichnet man einen Vektor $\overrightarrow{OP}$, wenn der Vektor vom Ursprung aus zum Punkt P zeigt. Sei $P(1|2|3)$, so ist der Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Rechnen mit Vektoren

(1) Addition von Vektoren

Gegeben seien die Punkte $P(2|1|0)$, $Q(3|2|-1)$ und $R(-1|0|2)$.

Aus den Punkten P, Q und R folgen zunächst die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Diese beiden miteinander addiert, ergibt sich $\vec{c}$ bzw. $\overrightarrow{PR}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-4) \\ 1 + (-2) \\ 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{c} = \overrightarrow{PR}.$$

(2) Subtraktion zweier Vektoren

Gegeben seien im zweidimensionalem Raum die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Subtraktion des Vektors $\vec{a}$ meint dasgleiche wie die Addition des Gegenvektors von $\vec{a}$. Für diesen gilt:

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für die Subtraktion des Vektoren $\vec{a}$ von $\vec{b}$ gilt also allgemein:

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a}).$$

Es ergibt sich für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} b_1 + (-a_1) \\ b_2 + (-a_2) \\ b_3 + (-a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Multiplikation von Vektoren

Soll beispielsweise der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ um das Dreifache verlängert werden, wird der Vektor mit dem Faktor 3 multipliziert:

$$3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \cdot a_1 \\ 3 \cdot a_2 \\ 3 \cdot a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(4) Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)

Multipliziert man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander, geschieht dies ähnlich der Addition. Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben und sollen miteinander multipliziert werden, ergibt sich:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_{3.} \cdot b_3 = \big(1 \cdot (-4)\big) + \big(1 \cdot (-4)\big) + \big((-1) \cdot 3\big) = -9\,.$$

Insbesondere gilt, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, so sind die beiden Vektoren orthogonal zueinander. Umgekehrt gilt derselbe Zusammenhang. Sind also $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben, so ergibt sich gemäß des Skalarprodukts:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_{3.} \cdot b_3 = \big(2 \cdot 5\big) + \big((-9) \cdot 2\big) + \big((-4) \cdot (-2)\big) = 0\,.$$

Diese beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind demnach orthogonal zueinander.

3. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Ob zwei Vektoren tatsächlich zueinander linear abhängig sind oder eben nicht, lässt sich ganz einfach bestimmen. So sind zwei Vektoren genau dann linear abhängig, wenn gilt:

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}.$$

Beispiele:

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Geprüft werden soll nun, ob $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig voneinander sind.

Damit die beiden Vektoren linear abhängig voneinander sind, muss $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ gelten. Es folgt folgender Zusammenhang:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 2k = 3 \\ -k = 5 \\ 4k = 7 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} k = 1{,}5 \\ k = -5 \\ k = \frac{7}{4} \end{matrix} \right|.$$

Da für k drei verschiedene Werte die Lösung sind, sind die Vektoren <u>nicht</u> linear abhängig voneinander.

b) Überprüft werden soll nun, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix}$ linear abhängig voneinander sind.

Damit die beiden Vektoren linear abhängig voneinander sind, muss $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ gelten. Es folgt folgender Zusammenhang:

$$k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} -3k = 5 \\ 6k = -10 \\ 12k = -20 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} k = -\frac{5}{3} \\ k = -\frac{5}{3} \\ k = -\frac{5}{3} \end{matrix} \right|.$$

Da für $k = -\frac{5}{3}$ gilt, sind die Vektoren linear abhängig voneinander.

Sind nun drei Vektoren gegeben und sollen diese linear abhängig voneinander sein, muss gelten:

$$n \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b} = \vec{c}.$$

Liegt dieser Zusammenhang vor, lässt sich $\vec{c}$ als **Linearkombination** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen.

Beispiel:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}7\\-1\\11\end{pmatrix}$. Lässt sich der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der anderen beiden Vektoren darstellen?

Um zu überprüfen, ob sich Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der anderen beiden darstellen lässt, gilt $n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}=\vec{c}$ und somit:

$$n\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\\11\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}n+2m=7\\n-2m=-1\\n+4m=11\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}n=3\\m=2\\0=0\end{matrix}\right|.$$

Das LGS ist lösbar. Der Vektor $\vec{c}$ lässt sich als Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen:

$$3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\\11\end{pmatrix}.$$

4. Geraden

Geraden sind sowohl im zwei- als auch im dreidimensionalen Raum darstellbar. Allgemein lässt sich die Parametergleichung wie folgt beschreiben:

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u},$$

wobei Vektor $\vec{p}$ den Stützvektor und Vektor $\vec{u}$ den Richtungsvektor der Geraden bezeichnet.

1. Angeben einer Geradengleichung
Sind zwei Punkte A und B angegeben, ist es möglich eine Geradengleichung zu erstellen. Folgende Schritte sind dafür angebracht: 1. Ermitteln eines Stützvektors (beispielsweise aus Punkt A: $\overrightarrow{OA}$ (immer vom Ursprung aus) 2. Ermitteln eines Richtungsvektors (über $\overrightarrow{AB}$) 3. Angeben der Geradengleichung gemäß allgemeiner Parametergleichung

2. Punktprobe
Soll überprüft werden, ob ein Punkt A auf der Geraden g liegt, kann dies über die Punktprobe untersucht werden. 1. Annahme, der Punkt A liege auf g 2. Punkt A als Vektor $\vec{a}$ anstelle von $\vec{x}$ einsetzen 3. LGS liefert für r einen konkreten Wert, somit liegt A auf g

Beispiele:

a) Versucht werden soll mit den gegebenen Punkten $A(1|2|3)$ und $B(3|2|1)$ eine mögliche Geradengleichung anzugeben.

Um die Geradengleichung anzugeben, sucht man sich zunächst einen der beiden Punkte aus (beide Punkte müssen auf der Geraden g liegen). Da zum Beispiel $A(1|2|3)$ auf der Geraden g liegt, ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein möglicher Stütz-vektor der Geraden. Da A und B auf g liegen, muss von A nach B ($\overrightarrow{AB}$) ein möglicher Richtungsvektor vorliegen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Mit dem berechneten Stütz- und Richtungsvektor, lässt sich die Geraden-gleichung der Geraden g mittels der Parametergleichung bestimmen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben sei für eine Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Überprüft soll mittels der Punktprobe, ob $A(2|3|-1)$ auf der Geraden g liegt.

Geht man davon aus $A(2|3|-1)$ liege auf der Geraden g, müsste dieser Punkt die Geradengleichung erfüllen, wenn $A(2|3|-1)$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{x}$ ist. Es folgt:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 7+5r=2 \\ 0-3r=3 \\ 4+5r=-1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5r=-5 \\ -3r=3 \\ 5r=-5 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r=-1 \\ r=-1 \\ r=-1 \end{array} \right|.$$

Da $r=-1$ die Gleichung löst, liegt der Punkt A auf der Geraden g.

5. Gegenseitige Lage von Geraden

In der Ebene sind zwei Geraden entweder parallel zueinander bzw. identisch oder schneiden sich und haben somit einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Im Raum können Gerade darüber hinaus noch windschief zueinander sein.

Folglich können Gerade im Raum a) zueinander parallel sein (oder sind sogar identisch), b) sich schneiden (es gibt einen Schnittpunkt) c) oder sind windschief zueinander.

Im Folgenden soll gelten:

$$g:\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u} \text{ und}$$
$$h:\vec{x}=\vec{q}+s\cdot\vec{v}.$$

Bestimmen gegenseitiger Lagen von Geraden
Um die Lage der Geraden zueinander zu bestimmen, kann gemäß folgender Aspekte vorgegangen werden: Nach dem Gleichsetzen der Geraden liefert das LGS a) nur eine Lösung → g und h **schneiden sich** → Schnittpunkt über Einsetzen der Lösungen in die Gleichungen b) unendlich viele Lösungen → g und h sind **identisch** c) keine Lösungen/ ist nicht lösbar → g und h sind entweder parallel oder windschief zueinander → Überprüfen der Richtungsvektoren → lineare Abhängigkeit: g und h sind **parallel** → lineare Unabhängigkeit: g und h sind **windschief**

Beispiele:

a) Bestimmt werden soll die Lage der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ zueinander.

Gleichsetzen beider Geradengleichungen liefert:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}2r-4s=2\\r-2s=-2\\r-2s=-2\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}r-2s=0\\0r+0s=1\\0=0\end{matrix}\right|.$$

Das LGS ist demnach nicht lösbar. Also können g und h parallel oder windschief zueinander sein. Das Überprüfen der Richtungsvektoren verschafft Klarheit:.

$$\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\cdot k=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}4k=2\\2k=1\\2k=1\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}k=0{,}5\\k=0{,}5\\k=0{,}5\end{matrix}\right|$$

Da die Richtungsvektoren linear voneinander abhängig sind, sind die Geraden g und h parallel zueinander.

b) Bestimmt werden soll die Lage der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ zueinander.

Gleichsetzen beider Geradengleichungen liefert:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}2r-s=2\\2r=2\\-2r-2s=-2\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}r=1\\s=0\\0=0\end{matrix}\right|.$$

Da das LGS mit nur einer Lösung lösbar ist, handelt es sich bei den Geraden um sich zwei schneidende Geraden. Einsetzen von r oder s bringt der Schnittpunkt. Beispielsweise $s=0$ in die Geradengleichung h eingesetzt, liefert:

$$h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}.$$

Folglich haben die beiden Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt an der Stelle $P(3|4|1)$.

c) Bestimmt werden soll die Lage der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ zueinander.

Gleichsetzen beider Geradengleichungen liefert:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}3r-2s=6\\2r-s=5\\r-3s=4\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}r=0\\s=0\\0=1\end{matrix}\right|.$$

Da das LGS nicht lösbar ist, sind die Geraden g und h entweder parallel oder windschief zueinander. Überprüfen der Richtungsvektoren ermöglicht eine Lagebestimmung:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot k=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}2k=3\\k=2\\3k=1\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}k=1{,}5\\k=2\\k=\frac{1}{3}\end{matrix}\right|.$$

Da die Richtungsvektoren nicht linear voneinander abhängig sind (k ist nicht gleich), liegen die Geraden g und h windschief zueinander.

6. Betrag eines Vektors

Für einen Vektor $\vec{a}$ mit $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ lässt sich der Betrag (entspricht der Länge eines Vektors) wie folgt bestimmen:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

- Ist $|\vec{a}| = 1$ nennt man diesen Vektor den **Einheitsvektor** $\overrightarrow{a_0}$.
- Der Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ hat dieselbe Richtung wie der Vektor $\vec{a}$. Es gilt für den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$:

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}\,.$$

Beispiele:

a) Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$ mit $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Im Folgenden soll nun sowohl der Betrag des Vektors als auch dessen Einheitsvektor bestimmt werden.

Der Betrag des Vektors $\vec{a}$ lässt sich gemäß $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ bestimmen:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7\,.$$

Da nun der Betrag des Vektors bekannt ist, kann mittels $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ der Einheitsvektor angegeben werden:

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben sind die beiden Punkte $A(1|5|6)$ und $B(1|6|7)$. Bestimmt werden soll Abstand dieser beiden Punkte zu einander.

Um den Abstand zweier Punkte zueinander zu bestimmen, gilt zunächst folgender Ansatz, indem der Betrag des Vektors angegeben werden soll, der von A nach B zeigt:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1-1 \\ 6-5 \\ 7-6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|.$$

Nach dem bekannten Schema kann über $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ *der Betrag des Vektors bestimmt werden. Es ergibt sich:*

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,.$$

Der Abstand dieser beiden Punkte kann somit als $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2}$ *angegeben werden.*

7. Winkel zwischen zwei Vektoren

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die von einem gemeinsamen Punkt aus verlaufen und zwischen denen ein Winkel γ entsteht, von diesem beide Vektoren aus „wegzeigen“. Für diesen Winkel γ gilt allgemein:

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Dabei gilt für den Winkel: $0 \leq \gamma \leq 180°$.
Man achte bei der Berechnung auf das Skalarprodukt im Zähler und den Betrag der jeweiligen Vektoren im Nenner.

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gesucht ist nun die Größe des Winkels γ, der sich zwischen den beiden Vektoren auftut.

Gemäß der Formel zur Bestimmung des Winkels γ über $\cos(\gamma)$ lässt sich zunächst dieser mittels eben dieser Formel $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ bestimmen:

$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{2 + 4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{112}}.$$

Um nun den Winkel γ zu bestimmen, gilt:

$$\gamma = arc\left(\cos\left(\frac{6}{\sqrt{112}}\right)\right).$$

Daraus folgt letztlich für den zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ befindlichen Winkel γ:

$$\gamma \approx 55{,}46°.$$

8. Ebenendarstellung mit Vektoren

Zur Darstellung einer Ebene im Raum kann man sich Vektoren bemächtigen. Allgemein beschreibt folgende Parametergleichung die Darstellung einer Ebene durch Vektoren:

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Dabei bezeichnet $\vec{p}$ den Stützvektor und $\vec{u}$ sowie $\vec{v}$ die Spannvektoren, unter denen sich die Ebene erstreckt, die beide linear unabhängig voneinander sind.

Erstellen einer Ebenengleichung
Sind drei Punkte A, B und C gegeben, kann eine Ebenengleichung in folgender Weise bestimmt werden: 1. Ermitteln des Stützvektors (beispielsweise über $\overrightarrow{OA}$) 2. Ermitteln der Spannvektoren (über $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$) 3. Einsetzen der ermittelten Stütz- und Spannvektoren in die allgemeine Parametergleichung liefert die Ebenengleichung

Beispiele:

a) Gegeben sind die Punkte $A(2|1|7)$, $B(-7|-1|2)$ und $C(1|-1|1)$. Unter Berücksichtigung dieser Angaben soll eine Ebenengleichung bestimmt werden.

Zunächst ergibt sich der Stützvektor $\vec{p}$ zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, wenn man davon ausgeht der Stützvektor erstrecke sich vom Ursprung aus (immer) zum Punkt A.

Im Weiteren lassen sich die Spannvektoren $\vec{u}$ zu $\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}$ zu $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ ermitteln. Dabei ergibt sich $\vec{u}$ über $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7-2 \\ -1-1 \\ 2-7 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}$ über $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1-1 \\ 1-7 \end{pmatrix}$.

Nun lässt sich die Ebenengleichung bestimmen. Es folgt also über den Ansatz der allgemeinen Parametergleichung:

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-9\\-2\\-5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-6\end{pmatrix}.$$

b) Gefragt ist, ob der Punkt $A(7|1|8)$ auf der Ebene mit der Ebenengleichung $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ liegt.

Über die Punktprobe kann überprüft werden, ob A auf E liegt. Dafür gilt zunächst aus $A(7|1|8)$ der Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix}$. Dies für $\vec{x}$ eingesetzt, folgt:

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}r+2s=5\\3r-s=1\\5r+s=7\end{array}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}r=1\\s=2\\0=0\end{array}\right|.$$

Da das LGS eine Lösung aufweist, ist nachgewiesen, dass der Punkt A auf der Ebenen E liegt.

9. Gegenseitige Lage von Ebenen

Gleich wie Geraden kann auch bei Ebenen die gegenseitige Lage zueinander bestimmt werden. Hier lässt sich unterscheiden zwischen paralleler Lage, identischer Lage und der Lage, die eine Schnittgerade hervorruft.

Bestimmen gegenseitiger Lage von Ebenen
Um die Lage zweier Ebenen zueinander zu definieren, gilt es zunächst die beiden Gleichungen gleichzusetzen. Danach ist das LGS a) nicht lösbar → Ebenen sind **parallel** zueinander b) lösbar → Einsetzen der Ergebnisse in die Ebenengleichung → Eliminierung eines Parameters: Entstehung einer **Schnittgerade** → keine Eliminierung eines Parameters: **identische** Lage

Beispiel:

Gegeben seien die beiden Ebenengleichungen $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Diese gilt es nun auf eine gegenseitige Lage hin zu untersuchen.

Um beide Ebenen auf gegenseitige Lage zueinander zu untersuchen, gilt der Ansatz beide Ebenengleichungen gleichzusetzen, gemäß $E_1 = E_2$. Es folgt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich weiterhin:

$$\left| \begin{array}{l} 5-2r=5-2v \\ 4s=5-4u \\ 4-4r-4s=3+2u+2v \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -2r+2v=0 \\ 4s+4u=5 \\ -4r-4s-2u-2v=-1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r-v=0 \\ s+3u=-\frac{3}{4} \\ u-3v=2 \end{array} \right|$$

Da das LGS lösbar ist bzw. unendlich viele Lösungen hat, gilt es nun durch Einsetzen der Ergebnisse zu überprüfen, ob ein Parameter eliminiert werden kann und es so eine Schnittgerade gibt oder ob doch kein Parameter eliminiert werden kann und die Ebenen somit identisch wären. Stellt man $u-3v=2$ nach u um, gilt für u:

$u = 2 + 3v$.

Dies eingesetzt in E_2 könnte eine Eliminierung eines Parameters zufolge haben, was eine Schnittgerade hervorruft. Es folgt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + (2+3v) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Und weiterhin durch Ausklammern:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Es folgt also:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Da ein Parameter eliminiert werden konnte und man somit eine Geradengleichung erhält, gilt für diese Geradengleichung bzw. Schnittgerade:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

10. Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden

Über die Lagebestimmung von Geraden zueinander oder auch Ebenen zueinander, ist es auch möglich die gegenseitige Lage einer Ebene und einer Gerade zu bestimmen.

Bestimmen gegenseitiger Lage von Ebenen und Geraden
Um die Lage einer Ebene und einer Geraden zu beschreiben, gilt es zunächst die beiden Gleichungen gleichzusetzen. Danach liefert das LGS a) genau eine Lösung → Gerade **schneidet** Ebene in einem bestimmten Punkt b) keine Lösung → Gerade verläuft **parallel** zur Ebene c) unendlich viele Lösungen → Gerade liegt **in der Ebene**

Beispiel:

Gegeben sei eine Geradengleichung $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\6\end{pmatrix}$ und eine Ebenengleichung $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$. Im Folgenden gilt es nun, die gegenseitige Lage dieser Ebene und Gerade zu überprüfen.

Um diese gegenseitige Lage der Ebene und Gerade zu überprüfen, gilt der Ansatz $g=E$, also das Gleichsetzen der Ebenen- und der Geradengleichung. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Also folgt nun:

$$\left|\begin{array}{l}-2+7r=1+v\\1+8r=4-u\\4+6r=3+u+3v\end{array}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}7r-v=3\\8r+u=3\\6r-u-3v=-1\end{array}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}r=1\\u=-5\\v=4\end{array}\right|.$$

Da das LGS genau diese eine Lösung hat, schneidet die Gerade die Ebene in einen bestimmten Punkt. Diesen erhält man durch Einsetzen der Parameter. Beispielweise durch Einsetzen von $r=1$ in die Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+7\\1+8\\4+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\9\\10\end{pmatrix}.$$

Folglich schneidet die Gerade die Ebene im Punkt $P(5|9|10)$.

Beispielaufgaben sind dem Schulbuch (Lambacher Schweizer 11/12, Mathematik für Gymnasien, Gesamtband Oberstufe, Niedersachsen; Klett-Verlag) entnommen.